

Esimerkki puhdistetun jäteveden rikkipitoisuuden määrittämisen epävarmuuden estimoinnista

Variografinen koe suoritettiin siten, että kuukauden ajan otettiin ja tutkittiin 1 vesinäyte/vrk. Virtaaman mahdollista vaihtelua ei otettu tässä huomioon ja joka kerta tutkittiin saman suuruinen näyte. Kuukauden keskiarvo ja heterogeenisuus voidaan laskea siten näytekoolla painottamatta

$$\frac{a_i}{\text{mg}\cdot\text{dm}^{-3}}$$

82.1
90.4
84.8
84.8
84.8
64.4
61.1
57.8
53.1
51.4
51.4
51.4
45.8
49.2
47.7
45
32.8
32.8
32.8
41.4
40.5
42.3
44.5
54.5
54.5
54.5
67.7
61.8
54.7
56.8

$$a_L := \text{mean}(a) \implies a_L = 55.9 \frac{\text{mg}}{\text{dm}^3} \text{ kuukauden keskiarvo}$$

$$h := \frac{a - a_L}{a_L} \text{ prosessin heterogeenisuus}$$

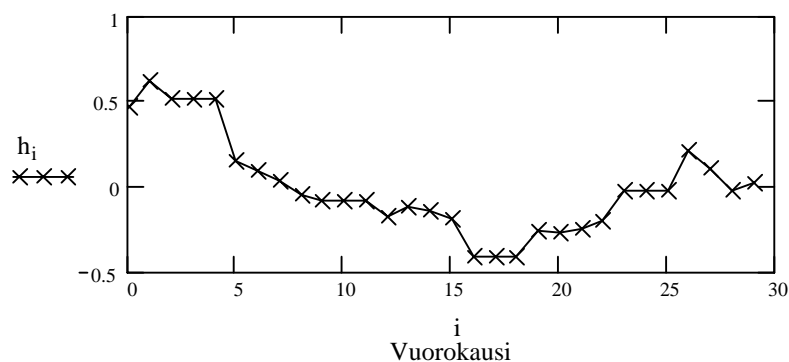
$$N := \text{length}(h) \quad N = 30 \text{ tutkittujen näytteiden luku}$$

$$i := 0..N - 1 \text{ näytteiden indeksit}$$

Koostumuksen heterogeenisuus (*Constitution heterogeneity*)

$$CH_L := \frac{1}{N} \cdot \sum h^2 \implies CH_L = 7.93 \times 10^{-2}$$

$$s_h := \sqrt{CH_L} \implies s_h = 0.2816$$



Kuva 1
 Prosessin heterogeenisuus

Mathcad-ohjelma variogrammin laskemiseksi

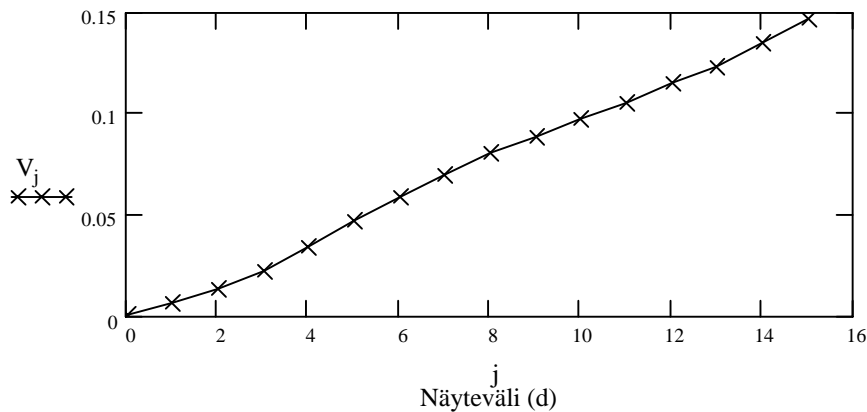
$$J := \text{floor}\left(\frac{N}{2}\right) \dots \text{Variogrammin pituus}$$

$$V(h) := \text{for } j \in 1..J$$

$$\left| \begin{array}{l} d1 \leftarrow \text{submatrix}(h, 0, N-1-j, 0, 0) \\ d2 \leftarrow \text{submatrix}(h, j, N-1, 0, 0) \\ V_j \leftarrow \frac{1}{2 \cdot (N-j)} \cdot \sum (d1 - d2)^2 \\ V \end{array} \right.$$

$$V := V(h)$$

$$V_0 := 1 \cdot 10^{-4} \quad \text{Variogrammin arvo näytevälille 0. Estimointiin lähekkäin otettujen rinnakkaisnäytteiden avulla}$$



Kuva 2
 Prosessin variogrammi näytevälin funktiona

Variogrammin integrointi varianssiestimaattien laskemiseksi

$$V_{sy_0} := V_0 \quad \text{ja} \quad V_{os_0} := V_0$$

$$j := 0..J, \quad j := 0..J, \quad t_j := j, \quad k := 0..2 \cdot J, \quad x_k := \frac{k}{2}$$

$$V_k := \text{interp}(t, V, x_k) \quad \text{variogrammin arvot integrointia varten mittauspisteiden puolivälissä saadaan lineaarilla interpoloinnilla}$$

$$S_0 := 0, S2_0 := 0, w_0 := V_0, w2_0 := 0$$

$$k := 1..2 \cdot J$$

$$j := 1..J$$

$$S_k := [S_{k-1} + 0.25 \cdot (V_{k-1}) + 0.25 \cdot V_{k-1}] \quad \text{ensimmäinen integrointi}$$

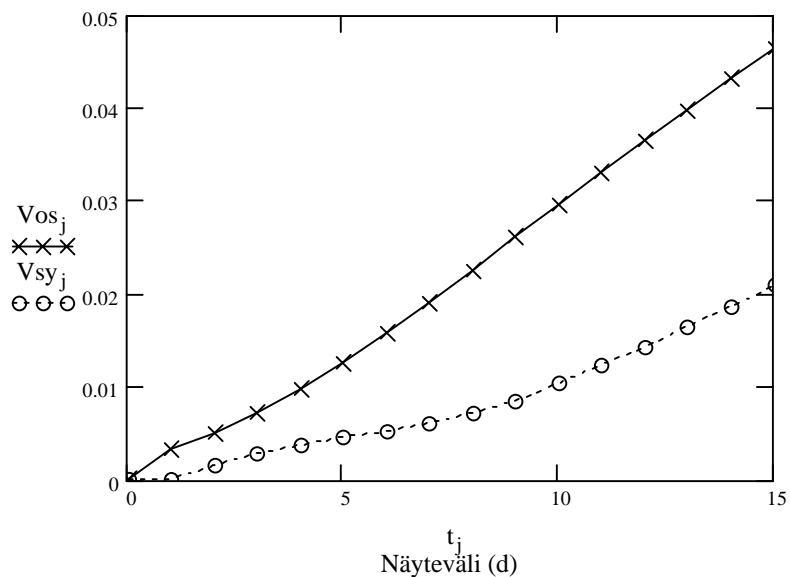
$$S2_j := [S2_{j-1} + 0.5 \cdot (S_{j-2}) + 0.5 \cdot S_{j-2}] \quad \text{toinen integrointi}$$

$$w_k := \frac{S_k}{k \cdot 5}$$

$$V_{osj} := \frac{2 \cdot S2_j}{j^2} \quad \text{yhden osan sisäinen varianssi ositetussa otannassa}$$

$$V_{syj} := 2 \cdot w_j - V_{osj} \quad \text{yhden osan sisäinen varianssi systemaattisessa otannassa}$$

$$j := 0..15$$



Kuva 3
Ositetun ja systemaattisen otannan osan sisäiset varianssit näytevälin (osan koon) funktiona

Numeeriset tulostukset

$i := 0..29$

$j := 0..15$

$i =$	$h_i =$	$V_j =$	$V_{syj} =$	$V_{osj} =$
0	0.469	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
1	0.617	$6.684 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-5}$	$3.392 \cdot 10^{-3}$
2	0.517	0.014	$1.678 \cdot 10^{-3}$	$5.106 \cdot 10^{-3}$
3	0.517	0.022	$2.872 \cdot 10^{-3}$	$7.295 \cdot 10^{-3}$
4	0.517	0.034	$3.847 \cdot 10^{-3}$	$9.795 \cdot 10^{-3}$
5	0.152	0.047	$4.625 \cdot 10^{-3}$	0.013
6	0.093	0.058	$5.271 \cdot 10^{-3}$	0.016
7	0.034	0.07	$6.055 \cdot 10^{-3}$	0.019
8	-0.05	0.08	$7.143 \cdot 10^{-3}$	0.023
9	-0.08	0.089	$8.563 \cdot 10^{-3}$	0.026
10	-0.08	0.097	0.01	0.03
11	-0.08	0.106	0.012	0.033
12	-0.181	0.115	0.014	0.036
13	-0.12	0.123	0.017	0.04
14	-0.147	0.135	0.019	0.043
15	-0.195	0.147	0.021	0.046
16	-0.413			
17	-0.413			
18	-0.413			
19	-0.259			
20	-0.275			
21	-0.243			
22	-0.204			
23	-0.025			
24	-0.025			
25	-0.025			
26	0.211			
27	0.106			
28	-0.021			
29	0.016			

Mikä on rikkimäärityksen vuosikeskiarvon epävarmuus, jos poistuvasta vedestä tutkitaan yksi näyte/viikko?

Vastaus:

Osan koko (näyteväli) = 7

Näytteiden (viikkojen) luku keskiarvon määrittämisessä: $n := 52$

Viikon sisäinen varianssi ja keskihajonta *ositettua otantaa* käytettäessä (viikon päivä, jolloin näyte otetaan, arvotaan joka viikko erikseen)

$$V_{OS_7} = 0.019 \implies s_{OS} := \sqrt{V_{OS_7}} \implies s_{OS} = 0.138 = 13.8\%$$

Vuosikeskiarvon keskihajonta ositetulle otannalle:

$$s_{ka} := \frac{s_{OS}}{\sqrt{n}} \implies s_{ka} = 1.9\%$$

=====

Viikon sisäinen varianssi ja keskihajonta *systemaattista otantaa* käytettäessä (viikon päivä, jolloin näyte otetaan, on aina sama)

$$V_{SY_7} = 6.0551 \times 10^{-3} \implies s_{SY} := \sqrt{V_{SY_7}} \implies s_{SY} = 0.078 = 7.8\%$$

Vuosikeskiarvon keskihajonta systemaattiselle otannalle:

$$s_{ka} := \frac{s_{SY}}{\sqrt{n}} \implies s_{ka} = 1.1\%$$

=====

Tässä tapauksessa voidaan käyttää systemaattista otantaa.

Tällöin vuosikeskiarvon kokonaisvirhe 95 %:n luottamustasolla on: $2 \cdot s_{ka} = 2.2\%$

=====

Mikä on rikkimäärityksen vuosikeskiarvon epävarmuus, jos poistuvasta vedestä tutkitaan yksi näyte joka toinen päivä?

Vastaus:

Osan koko (näyteväli) = 2

Näytteiden luku keskiarvon määrittämisessä: $n := 182$

Kahden päivän mittaisen jakson varianssi ja keskihajonta *systemaattista otantaa* käytettäessä (näyte otetaan joka toinen päivä)

$$V_{sy_2} = 1.678 \times 10^{-3} \implies s_{sy} := \sqrt{V_{sy_2}} \implies s_{sy} = 0.041 = 4.1\%$$

Vuosikeskiarvon keskihajonta systemaattiselle otannalle:

$$s_{ka} := \frac{s_{sy}}{\sqrt{n}} \implies s_{ka} = 0.3\%$$

=====

Tällöin vuosikeskiarvon kokonaisvirhe 95 %:n luottamustasolla on:

$$2 \cdot s_{ka} = 0.6\%$$

=====