

## Esimerkki näytteenottovirheen (integrovirheen) laskemisesta näytevälin funktiona käyttäen P. Gyn kehittämää variografista tekniikkaa

(Esimerkki kirjasta, Gy, P., Sampling of Heterogeneous and Dynamic Material Systems. Theories on Heterogeneity Sampling and Homogenizing, Elsevier, Amsterdam, 1992.)

Koetulokset  $a =$  uraanipitoisuus  $M_s =$  näytteen koko

	0		0		0		0				
	0	1.169		0	624		30	1.044		30	493
	1	1.187		1	603		31	1.033		31	484
	2	1.175		2	694		32	1.111		32	601
	3	1.153		3	571		33	0.981		33	681
	4	1.157		4	738		34	0.967		34	607
	5	1.146		5	599		35	0.981		35	638
	6	1.146		6	621		36	1.12		36	409
	7	1.133		7	649		37	1.081		37	625
	8	1.162		8	552		38	1.081		38	563
	9	1.139		9	569		39	1.073		39	525
	10	1.14		10	599		40	1.087		40	649
	11	1.137		11	595		41	1.096		41	576
	12	1.15		12	546		42	1.099		42	598
	13	1.121		13	562		43	1.114		43	610
$\frac{a}{\left(\frac{g}{kg}\right)} =$	14	1.162	$\frac{M_s}{g} =$	14	635	$\frac{a}{\left(\frac{g}{kg}\right)} =$	44	1.113	$\frac{M_s}{g} =$	44	703
	15	1.14		15	514		45	1.019		45	725
	16	1.162		16	592		46	1.116		46	744
	17	1.156		17	603		47	1.108		47	717
	18	1.129		18	642		48	1.077		48	632
	19	1.131		19	509		49	1.046		49	532
	20	1.124		20	560		50	1.078		50	584
	21	1.092		21	651		51	1.062		51	638
	22	1.111		22	680		52	1.098		52	648
	23	1.109		23	628		53	1.086		53	654
	24	1.092		24	690		54	1.1		54	551
	25	1.09		25	646		55	1.096		55	624
	26	1.11		26	648		56	1.129		56	677
	27	1.086		27	619		57	1.067		57	643
	28	1.091		28	589		58	1.087		58	659
	29	1.092		29	675		59	1.088		59	598

Variografisessa kokeessa kerätään tasavälein sarja näytteitä tutkittavasta kohteesta. Tässä tapauksessa on tutkittava kohde, jolle näytteenottovirhe ja sopiva näytteenottoväli on haluttu määrittää on ollut uraanin erotusprosessin syöttö. Näytteet on otettu vakionopeudella poikki virran leikkaavalla näytteenkeräimellä, jolloin näytteen koko on suoraan verrannollinen näytteenottohetken virtaamaan. Kun tulokset painotetaan näytteen koolla, eliminoituu *painotusvirhe*.

### Tuloksista lasketaan nyt seuraavat suureet:

Tutkittavan erän (prosessijakson) keskipitoisuus,  $a_L$  lasketaan näytteiden koolla painotettuna keskiarvona:

$$a_L := \frac{\sum (\overrightarrow{M_s \cdot a})}{\sum M_s} \quad \Rightarrow \quad a_L = 1103.7 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$$

Keskimääräinen näytekoosta  $M_m$ :

$$M_m := \text{mean}(M_s) \quad \Rightarrow \quad M_m = 613.2\text{g}$$

Erän heterogeisuus,  $h$ , kuvaa prosessin suhteellista vaihtelua erän keskiarvon ympärillä:

$$h := \frac{\overrightarrow{a - a_L} \cdot M_s}{a_L \cdot M_m}$$

Näytteiden luku,  $N$ :

$$N := \text{length}(h) \quad \Rightarrow \quad N = 60$$

$i := 0..N-1$  .. näytteiden indeksit (MATHCAD aloittaa indeksit 0:sta)

### Lisäksi lasketaan seuraavat suureet:

Heterogeisuuden varianssi, l. erän koostumuksen heterogeisuus (constitution heterogeneity),  $CH_L$ :

$$i := 0..N-1$$

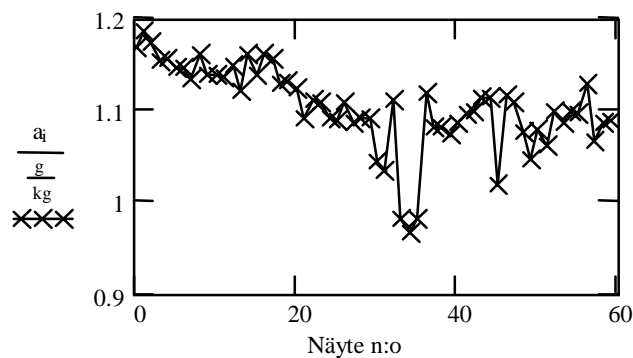
$$CH_L := \frac{1}{N} \cdot \sum h^2 \quad \Rightarrow \quad CH_L = 1.779 \times 10^{-3}$$

Prosessin suhteellinen keskihajonta:

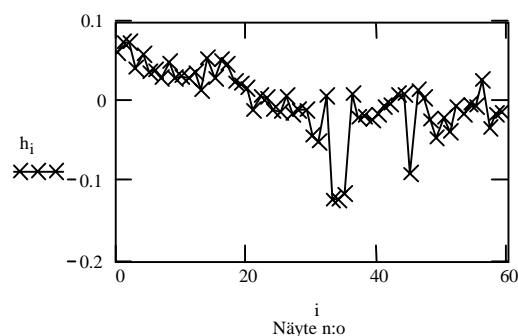
$$s_h := \sqrt{CH_L} \quad \Rightarrow \quad s_h = 0.0422$$

Näytevakio, jota  $G_y$  nimittää heterogeenisuuden invariantiksi (heterogeneity invariant):

$$HI_L := CH_L \cdot M_m \implies HI_L = 1.091g$$



Kuva 1  
 Uraanipitoisuuden vaihtelu rikastamon syötteessä



Kuva 2  
 Heterogeenisuuden kuvaaja

Heterogeenisuuden arvoista lasketaan prosessille variogrammi. Variogrammi lasketaan siten, että lasketaan vakioetäisyydellä,  $j$ , olevien heterogeenisuuden arvojen erotusten neliöiden keskiarvo, joka jaetaan kahdella. Näytteiden välistä etäisyyttä muutetaan arvosta 1 arvoon  $N/2$ .

$$J := \text{floor}\left(\frac{N}{2}\right) \text{ variogrammin pituus puolet koko kokeesn pituudesta (pyöristettynä kokonaisluvuksi)}$$

### Mathcad ohjelma heterogeenisuuden variogrammin, $v$ , laskemiseksi

$V(h) := \text{for } j \in 1..J$

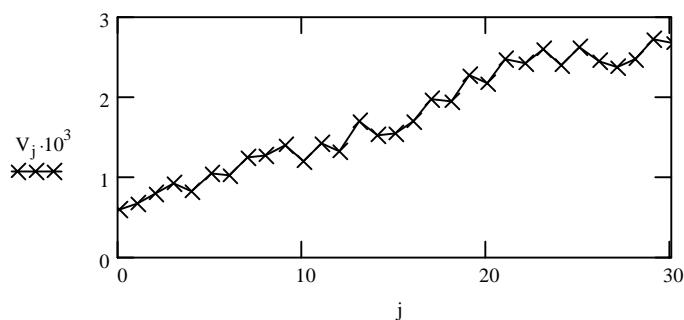
$$\left| \begin{array}{l} d1 \leftarrow \text{submatrix}(h, 0, N - 1 - j, 0, 0) \\ d2 \leftarrow \text{submatrix}(h, j, N - 1, 0, 0) \\ V_j \leftarrow \frac{1}{2 \cdot (N - j)} \cdot \sum (d1 - d2)^2 \\ V \end{array} \right.$$

$V := V(h)$

$V_0 := 6 \cdot 10^{-4}$

Gyn arvio  $V_0$  :lle. Integroinnissa tarvitaan variogrammin arvo ekstrapoloituna näyteväliin 0.  $V_0$  l. integrointivirheen IE1 varianssi, voidaan estimoida esim. kokeesta, jossa näytteet on otettu mahdollisimman tihein välein.

$j := 0..J$



*Kuva 3  
 Prosessin variogrammi*

$j := 0..J, \quad t_j := j, \quad k := 0..2 \cdot J, \quad x_k := \frac{k}{2}$

$V_k := \text{linterp}(t, V, x_k)$  numeerista integrointia varten interpoloidaan variogrammille arvot viereisten pisteiden puoliväliin

$S_0 := 0, \quad S_{2_0} := 0, \quad w_0 := V_0, \quad w_{2_0} := 0$

$k := 1..2 \cdot J, \quad j := 1..J$

$S_k := [S_{k-1} + 0.25(V_{k-1}) + 0.25 V_k]$

variogrammin ensimmäinen integraali

$S_{2_j} := [S_{2_{j-1}} + 0.5(S_{j-2_2}) + 0.5 S_{j-2}]$

variogrammin toinen integraali

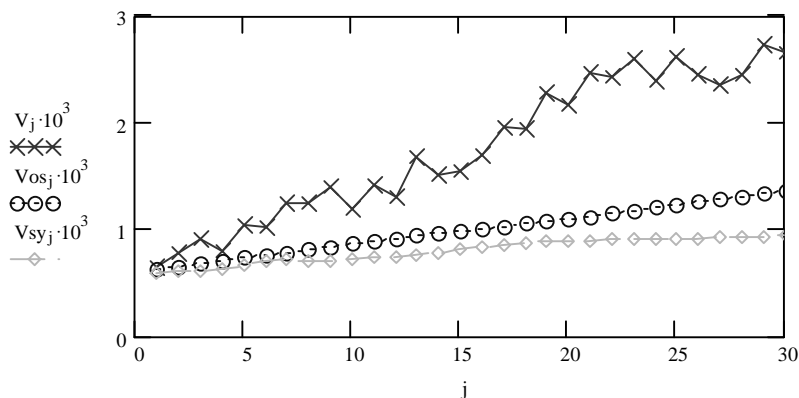
$w_k := \frac{S_k}{k \cdot 5}$

$$V_{osj} := \frac{2 \cdot S_{2j}}{j^2}$$

Yhden osan sisäinen varianssi ositetussa otannassa osan koon (j) funktiona

$$V_{syj} := 2 \cdot w_j - V_{osj}$$

Yhden osan sisäinen varianssi systemaattisessa otannassa osan koon funktiona



Kuva 4  
 Variogrammi, sekä ositetun otannan ja systemaattisen otannan varianssi näytevälin funktiona

Jos prosessin keskiarvo halutaan määrittää ajanjaksolta 100 tutkimalla 10 näytettä, saadaan seuraavat tulokset (sekä systemaattisen, että ositetun otannan osan koko 10

Näytteiden luku  $n := 10$

Systemaattinen otanta:

$$s_{sys} := \sqrt{V_{sy10}} \implies s_{sys} = 0.027 = 2.7\%$$

$$\text{keskiarvon keskihajonta} = \frac{s_{sys}}{\sqrt{n}} = 0.847\%$$

Ositettu otanta:

$$s_{os} := \sqrt{V_{os10}} \implies s_{os} = 0.029 = 2.9\%$$

$$\text{keskiarvon keskihajonta} = \frac{s_{os}}{\sqrt{n}} = 0.93\%$$

Jos kaikki 10 näytettä otetaan puhtaasti satunnaisotantana ilman ositusta, niin keskiarvon keskihajonta on

$$\frac{s_h}{\sqrt{n}} = 0.013\% = 1.3\%$$

### Numeeriset tulostukset

	0		0		0		0
0	0.06	0	$6 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0
1	0.074	1	$6.53 \cdot 10^{-4}$	1	$6 \cdot 10^{-4}$	1	$6.266 \cdot 10^{-4}$
2	0.073	2	$7.81 \cdot 10^{-4}$	2	$6.04 \cdot 10^{-4}$	2	$6.492 \cdot 10^{-4}$
3	0.042	3	$9.02 \cdot 10^{-4}$	3	$6.12 \cdot 10^{-4}$	3	$6.807 \cdot 10^{-4}$
4	0.058	4	$8.01 \cdot 10^{-4}$	4	$6.34 \cdot 10^{-4}$	4	$7.093 \cdot 10^{-4}$
5	0.037	5	$1.04 \cdot 10^{-3}$	5	$6.66 \cdot 10^{-4}$	5	$7.338 \cdot 10^{-4}$
6	0.039	6	$1.01 \cdot 10^{-3}$	6	$6.99 \cdot 10^{-4}$	6	$7.581 \cdot 10^{-4}$
7	0.028	7	$1.24 \cdot 10^{-3}$	7	$7.16 \cdot 10^{-4}$	7	$7.836 \cdot 10^{-4}$
8	0.048	8	$1.25 \cdot 10^{-3}$	8	$7.08 \cdot 10^{-4}$	8	$8.105 \cdot 10^{-4}$
9	0.03	9	$1.39 \cdot 10^{-3}$	9	$7.03 \cdot 10^{-4}$	9	$8.385 \cdot 10^{-4}$
10	0.032	10	$1.19 \cdot 10^{-3}$	10	$7.18 \cdot 10^{-4}$	10	$8.658 \cdot 10^{-4}$
11	0.029	11	$1.41 \cdot 10^{-3}$	11	$7.37 \cdot 10^{-4}$	11	$8.912 \cdot 10^{-4}$
12	0.037	12	$1.3 \cdot 10^{-3}$	12	$7.48 \cdot 10^{-4}$	12	$9.149 \cdot 10^{-4}$
13	0.014	13	$1.69 \cdot 10^{-3}$	13	$7.61 \cdot 10^{-4}$	13	$9.378 \cdot 10^{-4}$
14	0.055	14	$1.5 \cdot 10^{-3}$	14	$7.86 \cdot 10^{-4}$	14	$9.609 \cdot 10^{-4}$
15	0.028	15	$1.54 \cdot 10^{-3}$	15	$8.13 \cdot 10^{-4}$	15	$9.835 \cdot 10^{-4}$
16	0.051	16	$1.7 \cdot 10^{-3}$	16	$8.35 \cdot 10^{-4}$	16	$1.005 \cdot 10^{-3}$
17	0.047	17	$1.96 \cdot 10^{-3}$	17	$8.56 \cdot 10^{-4}$	17	$1.027 \cdot 10^{-3}$
18	0.024	18	$1.94 \cdot 10^{-3}$	18	$8.8 \cdot 10^{-4}$	18	$1.05 \cdot 10^{-3}$
19	0.021	19	$2.27 \cdot 10^{-3}$	19	$8.95 \cdot 10^{-4}$	19	$1.074 \cdot 10^{-3}$
20	0.017	20	$2.16 \cdot 10^{-3}$	20	$8.97 \cdot 10^{-4}$	20	$1.098 \cdot 10^{-3}$
21	-0.011	21	$2.47 \cdot 10^{-3}$	21	$8.95 \cdot 10^{-4}$	21	$1.124 \cdot 10^{-3}$
22	$7.361 \cdot 10^{-3}$	22	$2.42 \cdot 10^{-3}$	22	$9 \cdot 10^{-4}$	22	$1.15 \cdot 10^{-3}$
23	$4.943 \cdot 10^{-3}$	23	$2.6 \cdot 10^{-3}$	23	$9.05 \cdot 10^{-4}$	23	$1.177 \cdot 10^{-3}$
24	-0.012	24	$2.38 \cdot 10^{-3}$	24	$9.01 \cdot 10^{-4}$	24	$1.204 \cdot 10^{-3}$
25	-0.013	25	$2.61 \cdot 10^{-3}$	25	$9.02 \cdot 10^{-4}$	25	$1.231 \cdot 10^{-3}$
26	$6.058 \cdot 10^{-3}$	26	$2.45 \cdot 10^{-3}$	26	$9.15 \cdot 10^{-4}$	26	$1.258 \cdot 10^{-3}$
27	-0.016	27	$2.36 \cdot 10^{-3}$	27	$9.3 \cdot 10^{-4}$	27	$1.284 \cdot 10^{-3}$
28	-0.011	28	$2.46 \cdot 10^{-3}$	28	$9.36 \cdot 10^{-4}$	28	$1.31 \cdot 10^{-3}$
29	-0.012	29	$2.72 \cdot 10^{-3}$	29	$9.37 \cdot 10^{-4}$	29	$1.335 \cdot 10^{-3}$
30	-0.043	30	$2.66 \cdot 10^{-3}$	30	$9.39 \cdot 10^{-4}$	30	$1.36 \cdot 10^{-3}$
31	-0.051						
32	$6.506 \cdot 10^{-3}$						
33	-0.123						
34	-0.123						

	0
35	-0.116
36	$7 \cdot 10^{-3}$
37	-0.021
38	-0.019
39	-0.024
40	-0.016
41	$1 \cdot 10^{-3}$
42	$3 \cdot 10^{-3}$
43	$8 \cdot 10^{-3}$
44	$8 \cdot 10^{-3}$
45	-0.091
46	0.014
47	$4 \cdot 10^{-3}$
48	-0.025
49	-0.045
50	-0.022
51	-0.039
52	$3 \cdot 10^{-3}$
53	-0.017
54	$1 \cdot 10^{-3}$
55	$6 \cdot 10^{-3}$
56	0.025
57	-0.035
58	-0.016
59	-0.014